МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

АССОЦИИРОВАННЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ, ФУНКЦИИ КОШИ И ВРОНСКИАНЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИЙ

Т.С. Автушко

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

ASSOCIATED FUNDAMENTAL MATRICES, CAUCHY FUNCTIONS AND WRONSKIANS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH GENERALIZED COEFFICIENTS IN THE ALGEBRA OF MNEMOFUNCTIONS

T.S. Autushka

Belarusian State University, Minsk, Belarus

В статье исследуются задачи Коши для линейного однородного и линейного неоднородного дифференциальных уравнений второго порядка с обобщёнными коэффициентами в алгебре мнемофункций. Введены и исследованы ассоциированные функции Коши и ассоциированные вронскианы, найдены выражения для функций Коши и фундаментальных матриц через фундаментальные системы решений, даны представления ассоциированных решений неоднородной задачи Коши через функции Коши.

Ключевые слова: *линейное дифференциальное уравнение второго порядка, алгебра мнемофункций, ассоциированные решения, фундаментальные системы решений, ассоциированные фундаментальные матрицы, ассоциированные функции Коши, ассоциированные вронскианы.*

In the paper Cauchy problems for a homogeneous and nonhomogeneous linear differential equations with generalized coefficients in algebra mnemofunctions are investigated. Associated Cauchy functions and associated Wronskians are introduced and studied. Expressions for the Cauchy functions and for the fundamental matrices are found by the fundamental system of solutions. Representations associated solutions of the Cauchy problem are given by means of Cauchy functions.

Keywords: *linear differential equation of the second order, algebra mnemofunctions, associated solutions, associated fundamental matrices, fundamental systems of solutions, associated Cauchy functions, associated Wronskians.*

Введение

В работе исследуется задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщёнными коэффициентами

$$\begin{cases} Y''(t)+a'(t)Y'(t)+\sigma'(t)Y(t)+f'(t)=0, \\ Y(0)=c_1, \\ Y'(0)=c_2, \end{cases} \tag{0.1}$$

где $t\in \boldsymbol{T}=[0,b]$, $b,\ c_1, c_2\in\mathbb{R},\ \sigma,a,f:\boldsymbol{T}\to\mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, σ', a', f' – их обобщённые производные.

Рассматриваемая задача является некорректной, поскольку в уравнении присутствуют произведения обобщённых функций. Изучением подобных задач как линейных, так и нелинейных занимались многие авторы (см., напр., [1]–[5]). В настоящем сообщении задача Коши (0.1) исследуется в прямом произведении алгебр мнемофункций [6]. В работе введены и исследованы ассоциированные функции Коши и ассоциированные вронскианы, найдены выражения для функций Коши и фундаментальных матриц через фундаментальные системы решений, даны представления ассоциированных решений через функции Коши.

Перепишем задачу (0.1) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} X'(t)=L'(t)X(t)+F'(t),\ t\in\boldsymbol{T}, \\ X(0)=X_0, \end{cases} \tag{0.2}$$

здесь

$$X_1(t)=Y(t),\ X_2(t)=Y'(t),$$

$$X(t)=\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t)\end{pmatrix},\ X_0=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix},\ F'(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ -f'(t)\end{pmatrix},$$

$$L'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma'(t) & -a'(t)\end{pmatrix}.$$

В прямом произведении алгебр мнемофункций задача Коши (0.2) будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} d_{\tilde h}\tilde X(\tilde t)=d_{\tilde h}\tilde L(\tilde t)\tilde X(\tilde t)+d_{\tilde h}\tilde F(\tilde t),\ \ \tilde t\in\tilde T, \\ \tilde X\big|_{[\tilde 0,\tilde h)}=\tilde X_0(\tilde t), \end{cases} \tag{0.3}$$

где

$$\tilde{X}(\tilde{t}) = (\tilde{X}_1(\tilde{t}), \tilde{X}_2(\tilde{t}))^T =$$
$$= \left(\left[\left(X_n^1(t_n)\right)\right], \left[\left(X_n^2(t_n)\right)\right]\right)^T,$$
$$\tilde{F}(\tilde{t}) = (\tilde{0}, \tilde{f}(\tilde{t}))^T = \left([(0)], [(f_n(t_n))]\right)^T,$$
$$\tilde{L}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{t} \\ -\tilde{\sigma}(\tilde{t}) & -\tilde{a}(\tilde{t}) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} [(0)] & [(t_n)] \\ [(-\sigma_n(t_n))] & [(-a_n(t_n))] \end{pmatrix},$$
$$\tilde{h} = [(h_n)].$$

или на уровне представителей

$$\begin{cases} X_n(t+h_n) - X_n(t) = \\ = [L_n(t+h_n) - L_n(t)] X_n(t) + \\ + [F_n(t+h_n) - F_n(t)],\ t \in \boldsymbol{T}, \\ X_n|_{[0,h_n)} = X_{n_0}(t). \end{cases} \tag{0.4}$$

Здесь

$$X_n(t) = \begin{pmatrix} X_n^1(t) \\ X_n^2(t) \end{pmatrix},\ X_{n_0}(t) = \begin{pmatrix} X_{n_0}^1(t) \\ X_{n_0}^2(t) \end{pmatrix},$$
$$F_n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f_n(t) \end{pmatrix},$$
$$L_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -\sigma_n(t) & -a_n(t) \end{pmatrix},$$
$$a_n(t) = (a * \rho_n^1)(t), \quad \rho_n^1(t) = n\rho(nt),$$
$$f_n(t) = (f * \rho_n^1)(t),$$
$$\sigma_n(t) = (\sigma * \rho_n^2)(t), \quad \rho_n^2(t) = \gamma(n)\rho(\gamma(n)t),$$
$$\gamma(n) \to \infty \text{ при } n \to \infty,$$
$$\rho \geq 0,\ \rho \in C^\infty(\mathbb{R}),\ supp(\rho) \subseteq [0,1],\ \int_0^1 \rho(s)\,ds = 1.$$

Знак $(\cdot)^T$ означает транспонирование.

1 Ассоциированные решения задачи Коши

***Замечание* 1.1.** Используя следствие 2.1 из работы [7], несложно показать, что для любых a, σ, f: $\boldsymbol{T} \to \mathbb{R}$ – непрерывных справа функций ограниченной вариации решение задачи (0.4) при $n \to \infty$, $h_n \to 0$, $\gamma(n) \to \infty$ сходится покоординатно в $L^1(\boldsymbol{T})$ только при $1/n = o(h_n)$, $1/\gamma(n) = o(h_n)$, или $1/n = o(h_n)$, $h_n = o(1/\gamma(n))$, или $h_n = o(1/n)$, $1/\gamma(n) = o(h_n)$, или $h_n = o(1/n)$, $h_n = o(1/\gamma(n))$.

***Теорема* 1.1** [8]. *Пусть a, σ, f: $\boldsymbol{T} \to \mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации и*

$$\sup_{t\in[0,h_n)} \left\| X_{n_0}(t) - X_0 \right\| \xrightarrow[n\to\infty, h_n\to 0]{} 0, \tag{1.1}$$

тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$, $\gamma(n) \to \infty$ для $i = \overline{1,4}$

$$\int_{\boldsymbol{T}} \left\| X_n(t) - X^i(t) \right\| dt \to 0,$$

где $X_n(t)$ – решение задачи Коши (0.4), *а $X^i(t)$, $i = \overline{1,4}$ – решения интегральных уравнений*

$$\begin{gathered} X^i(t) = X(0) + \int_0^t dL^i(s) X^i(s) + \\ + F(t) - F(0),\ t \in \boldsymbol{T},\ i = \overline{1,4}, \end{gathered} \tag{1.2}$$

интеграл понимается в смысле неклассического интеграла Римана – Стилтьеса,

$$L^i(t) = L^c(t) + \sum_{\mu_l \leq t} \Delta L^i(\mu_l),\ t \in \boldsymbol{T},\ i = \overline{1,4}, \tag{1.3}$$

$L^c(t)$ – непрерывная составляющая функции $L(t)$, μ_l, $l \in \mathbb{N}$ – точки разрыва функций $a(t)$ и $\sigma(t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, занумерованные одним индексом, и при $n \to \infty$, $h_n \to 0$, $\gamma(n) \to \infty$

$$\Delta L^1(\mu_l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta\sigma(\mu_l) & -\Delta a(\mu_l) \end{pmatrix},$$

если $1/n = o(h_n)$ и $1/\gamma(n) = o(h_n)$;

$$\Delta L^2(\mu_l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta\sigma(\mu_l) & e^{-\Delta a(\mu_l)} - 1 \end{pmatrix},$$

если $1/n = o(h_n)$ и $h_n = o(1/\gamma(n))$;

$$\Delta L^3(\mu_l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta\sigma(\mu_l)(1 - \Delta a(\mu_l)) & -\Delta a(\mu_l) \end{pmatrix},$$

если $h_n = o(1/n)$ и $1/\gamma(n) = o(h_n)$;

$$\Delta L^4(\mu_l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\Delta\sigma(\mu_l)}{\Delta a(\mu_l)}\left(e^{-\Delta a(\mu_l)} - 1\right) & e^{-\Delta a(\mu_l)} - 1 \end{pmatrix}$$

при $\Delta a(\mu_l) \neq 0$, и

$$\Delta L^4(\mu_l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta\sigma(\mu_l) & 0 \end{pmatrix}$$

при $\Delta a(\mu_l) = 0$, $l = 1, 2, \dots$, если

$h_n = o(1/n)$ и $h_n = o(1/\gamma(n))$.

Интегралы и дифференциалы от матричнозначных функций берем покоординатно, $\Delta L(t) = L(t) - L(t-0)$,

$$\|Y\| = \sum_{i=1}^n |Y_i|,\ Y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|X\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X_{ij}|,\ X \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Используя теорему 8.24 из монографии [9, с. 393], в работе [10] было показано, что решения уравнений (1.2), $i = \overline{1,4}$, для любых начальных условий существуют и единственны для каждого i, причем каждые координаты решений являются непрерывными справа функциями ограниченной вариации.

Функция $X(t)=\left(X_1(t),X_2(t)\right)^T$ называется *ассоциированным решением* задачи Коши (0.3), если для любых представителей мнемофункций $\tilde{\sigma},\ \tilde{a},\ \tilde{f},\ \tilde{X}_0^1,\ \tilde{X}_0^2$ решение задачи (0.4)

$$X_n(t)=\left(X_n^1(t),X_n^2(t)\right)^T$$

при $n\to\infty$ покоординатно в $L^1(\boldsymbol{T})$ сходится к $X(t)=\left(X_1(t),X_2(t)\right)^T$ и $\left[\left(X_n^j(t)\right),n\in\mathrm{N}\right],j=1,2$ являются элементами алгебры.

При выполнении условий бесконечной дифференцируемости начальных условий задачи (0.3), существования конечных односторонних производных всех порядков в нуле, условия (1.1), *ассоциированные решения* задачи Коши (0.3) являются *решениями систем* (1.2), $i=\overline{1,4}$, причем первые координаты решений

$$X^i(t)=\left(X_1^i(t),X_2^i(t)\right)^T,\ t\in\boldsymbol{T},\ \ i=\overline{1,4},$$

систем (1.2) абсолютно непрерывны [8].

2 Ассоциированные фундаментальные матрицы, функции Коши, вронскианы

Рассмотрим однородные интегральные уравнения

$$X^i(t)=X^i(s)+\int_s^t dL^i(r)X^i(r),\ i=\overline{1,4},\quad(2.1)$$

$t\in\boldsymbol{T}$, $\forall$ фиксированное $s\in\boldsymbol{T}$.

Ассоциированные фундаментальные матрицы $B^i(t,r),\ r,\ t\in\boldsymbol{T},\ i=\overline{1,4}$, в статье [8] определялись как решения интегральных уравнений

$$B^i(t,r)=E+\int_r^t dL^i(s)B^i(s,r),r,\ t\in\boldsymbol{T},\ \ i=\overline{1,4},\quad(2.2)$$

где матрицы $L^i,\ i=\overline{1,4}$ из теоремы 1.1.

Ассоциированными функциями Коши назовем функции $K^i(t,r)$: $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T}\to\mathbb{R}$, которые при любом фиксированном $r\in\boldsymbol{T}$ являются первыми координатами решений уравнений

$$\begin{pmatrix}K^i(t,r)\\K_1^i(t,r)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int_r^t dL^i(s)\begin{pmatrix}K^i(s,r)\\K_1^i(s,r)\end{pmatrix},\quad(2.3)$$

$$t\in\boldsymbol{T},\ i=\overline{1,4}.$$

Решения уравнений (2.2), $i=\overline{1,4}$, существуют и единственны для каждого *i,* и каждые координаты решений являются непрерывными справа функциями ограниченной вариации [8]. Это же верно и для уравнений (2.3), $i=\overline{1,4}$.

***Утверждение* 2.1.** *Ассоциированные функции Коши* $K^i(t,r),\ \ i=\overline{1,4}$ *абсолютно непрерывны по* $t\in\boldsymbol{T}$ *для любого фиксированного* $r\in\boldsymbol{T}$.

Доказательство. Первые уравнения систем (2.3) для любой из четырех возможных матриц ΔL^i имеют вид

$$K^i(t,r)=\int_r^t K_1^i(s,r)ds,\ i=\overline{1,4}.\quad(2.4)$$

Поскольку функции $K_1^i(t,r),\ i=\overline{1,4}$ по переменной t интегрируемые, а в уравнениях (2.4) присутствует интеграл Лебега с переменным верхним пределом, который абсолютно непрерывен для любого фиксированного $r\in\boldsymbol{T}$, заключаем, что $K^i(t,r),\ t\in\boldsymbol{T},\ \forall\ fix\ r\in\boldsymbol{T},\ i=\overline{1,4}$ абсолютно непрерывны.

***Утверждение* 2.2.** $K_1^i(t,r)=\left(K^i(t,r)\right)'_t$, $\forall t,r\in\boldsymbol{T}$ *и* $K_1^i(t,r)$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации*, $i=\overline{1,4}$.

Доказательство. Так как функции Коши $K^i(t,r),\ \ i=\overline{1,4}$ абсолютно непрерывны по $t\in\boldsymbol{T}$ для любого фиксированного $r\in\boldsymbol{T}$, то для любого фиксированного $r\in\boldsymbol{T}$ $\exists\ \varphi^i(t,r)$ такие, что для любого $t\in\boldsymbol{T}$ [11, с. 90]

$$K^i(t,r)=\int_r^t\varphi^i(s,r)ds,\ i=\overline{1,4},\quad(2.5)$$

где $\varphi^i(t,r)=\left(K^i(t,r)\right)'_t$ – обобщенные производные функций Коши $K^i(t,r)$ по переменной t.

Из 1-ых уравнений систем (2.3) имеем равенства (2.4). Из утверждения 2.1 функции $K^i(t,r)$ абсолютно непрерывные, из теоремы 8.24 монографии [9] $K_1^i(t,r)$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Из равенств (2.4) и (2.5) получаем

$$\int_r^t\varphi^i(s,r)ds=\int_r^t K_1^i(s,r)ds,\ \ \forall\ fix\ r\in\boldsymbol{T}.$$

Откуда следует $\varphi^i(s,r)=K_1^i(s,r)$, т. е. $\left(K^i(t,r)\right)'_t=K_1^i(t,r),\ \forall\ fix\ r\in\boldsymbol{T},\ i=\overline{1,4}$.

Последнее равенство для каждого i определено с точностью до меры Лебега нуль, в точках непрерывности $K_1^i(t,r)$ совпадают с $\left(K^i(t,r)\right)'_t$, в точках разрыва $K_1^i(t,r)$ доопределяем по непрерывности справа.

Рассмотрим матрицы

$$\phi^i(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1^i(t) & \varphi_2^i(t)\\ \left(\varphi_1^i(t)\right)' & \left(\varphi_2^i(t)\right)'\end{pmatrix},\ t\in\boldsymbol{T},\ i=\overline{1,4},\quad(2.6)$$

где $\varphi_1^i(t),\ \varphi_2^i(t)$ – первые координаты любых двух решений системы (2.1), $i=\overline{1,4}$.

***Утверждение* 2.3.** *Пусть* $\varphi_1^i(t)$, $\varphi_2^i(t)$, $t\in\boldsymbol{T},\ i=\overline{1,4}$ *– первые координаты любых двух решений i-го матричного уравнения* (2.1). *Тогда* *их обобщенные производные* $\left(\varphi_j^i(t)\right)'$, $j=1,2$ *являются вторыми координатами решений i - го уравнения* (2.1) *и* $\left(\varphi_j^i(t)\right)'$, $j=1,2$ – *непрерывные справа функции ограниченной вариации.*

Доказательство. Поскольку функции $\varphi_1^i(t)$, $\varphi_2^i(t)$, $i=\overline{1,4}$ абсолютно непрерывны, то существуют обобщенные производные $\left(\varphi_j^i(t)\right)'$, $j=1,2$, $i=\overline{1,4}$, которые равны

$$\varphi_j^i(t)-\varphi_j^i(s)=\int_s^t\left(\varphi_j^i(\tau)\right)' d\tau.$$

Первое уравнение системы (2.1) имеет вид $X_1^i(t)=X_1^i(s)+\int_s^t X_2^i(\tau)d\tau.$ Подставляя сюда вместо $X_1^i(t)$ функцию $\varphi_j^i(t)$, получаем

$$\int_s^t X_2^i(\tau)d\tau=\int_s^t\left(\varphi_j^i(\tau)\right)' d\tau.$$

Откуда видно, что $\left(\varphi_j^i(\tau)\right)'=X_2^i(\tau)$.

Ассоциированными вронскианами $W^i(t)$, $i=\overline{1,4}$, $t\in\boldsymbol{T}$ *i*-ых уравнений (2.1) назовем определители матричнозначных функций ϕ^i из определения (2.6).

Произвольную линейно независимую систему первых координат решений уравнений (2.1) $\varphi_1^i(t)$ и $\varphi_2^i(t)$, $i=\overline{1,4}$ назовем *фундаментальной системой решений* соответствующего *i*-го уравнения (2.1).

В следующей теореме доказаны аналоги формул Лиувилля – Остроградского – Якоби для нахождения вронскиана решений интегральных уравнений (2.1), $i=\overline{1,4}$.

***Теорема* 2.1** [8]. *Пусть* a, σ: $\boldsymbol{T}\to\mathbb{R}$ – *непрерывные справа функции ограниченной вариации, тогда для ассоциированных вронскианов* $W^i(t)$ *справедливы формулы*

$$W^i(t)=\exp\left\{-\int_s^t da^c(r)\right\}\times \times\prod_{s<\mu_l\le t}(1-\Delta a(\mu_l))W^i(s), i=1,3, \quad (2.7)$$

$$W^i(t)=\exp\left\{-\int_s^t da(r)\right\}W^i(s), i=2,4. \quad (2.8)$$

***Теорема* 2.2** [8]. *Если первые координаты решений уравнений* (2.1) $\varphi_1^i(t)$ *и* $\varphi_2^i(t)$, $\forall\, t\in\boldsymbol{T}$, $i=\overline{1,4}$ *линейно зависимы, то* $W^i(t)\equiv 0$, $t\in\boldsymbol{T}$. *Если* $\exists\, t_0\in\boldsymbol{T}$, $W^i(t_0)=0$, *то решения* $\varphi_1^i(t)$, $\varphi_2^i(t)$, *соответствующего i-го уравнения* (2.1) *линейно зависимые*, $i=\overline{1,4}$.

***Следствие* 2.1** [12]. *Если* $\exists\, t\in\boldsymbol{T}$, $W^i(t)\ne 0$, *то решения* $\varphi_1^i(t)$, $\varphi_2^i(t)$ *уравнений* (2.1), $i=\overline{1,4}$ *образуют фундаментальную систему решений.*

Доказательство теоремы 2.2 проводится аналогично доказательству теоремы 12.5 из монографии [4].

3 Конструкции ассоциированных фундаментальных матриц и ассоциированных функций Коши

***Утверждение* 3.1.** *Пусть* $\varphi_1^i(t)$, $\varphi_2^i(t)$ – *произвольная фундаментальная система решений соответствующего i-го уравнения* (2.1) *и для* $i=1,3$ $\Delta a(\mu_l)\ne 1$ $\forall\mu_l,\mu_l$ – *точки разрыва функции* $a(t)$, *тогда существуют обратные матрицы* $\left(\phi^i(t)\right)^{-1}$, $i=\overline{1,4}$.

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $\varphi_1^i(t)$, $\varphi_2^i(t)$ – *произвольная фундаментальная система решений соответствующего i-го уравнения* (2.1) *и для* $i=1,3$ $\Delta a(\mu_l)\ne 1$ $\forall\mu_l,\mu_l$ – *точки разрыва функции* $a(t)$, *тогда ассоциированные фундаментальные матрицы* $B^i(t,s)$, $i=\overline{1,4}$ *уравнений* (2.1) *представимы в виде*

$$B^i(t,s)=\phi^i(t)\left(\phi^i(s)\right)^{-1}, \forall s,t\in\boldsymbol{T}, i=\overline{1,4}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Функции $\phi^i(t)$ являются решениями уравнений (2.1), $i=\overline{1,4}$, т. е. $\phi^i(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\phi^i(t)=\phi^i(s)+\int_s^t dL^i(r)\phi^i(r), t\in T, i=\overline{1,4}$$

для произвольного фиксированного $s\in\boldsymbol{T}$, поскольку каждый столбец матрицы $\phi^i(t)$, $i=\overline{1,4}$ есть решение соответствующего *i*-ого уравнения.

Учитывая утверждение 3.1, матрицы $\left(\phi^i(s)\right)^{-1}$, $i=\overline{1,4}$ существуют. Умножая справа последнее уравнение на $\left(\phi^i(s)\right)^{-1}$, получим

$$\phi^i(t)\left(\phi^i(s)\right)^{-1}=\phi^i(s)\left(\phi^i(s)\right)^{-1}+ +\left(\int_s^t dL^i(r)\phi^i(r)\right)\left(\phi^i(s)\right)^{-1}, i=\overline{1,4},$$

$$\phi^i(t)\left(\phi^i(s)\right)^{-1}= =E+\int_s^t\left(dL^i(r)\phi^i(r)\left(\phi^i(s)\right)^{-1}\right), i=\overline{1,4}.$$

Сравнивая получившееся уравнение с уравнением (2.2), получаем представление (3.1), так как по переменной *t* при любом фиксированном $s\in\boldsymbol{T}$ решение (2.2) существует и единственно.

***Теорема* 3.2.** *Пусть* $\varphi_1^i(t)$ *и* $\varphi_2^i(t)$, $i=\overline{1,4}$ *произвольная фундаментальная система решений* *соответствующего i-го уравнения* (2.1) *и при* $i = 1, 3$ $\Delta a(\mu_l) \neq 1 \, \forall \mu_l$, *где* μ_l *– точки разрыва функции a на отрезке* $[s, t]$, *тогда функции Коши имеют вид*

$$K^i(t,s) = \frac{1}{W^i(s)} \det\begin{pmatrix} \varphi_1^i(s) & \varphi_2^i(s) \\ \varphi_1^i(t) & \varphi_2^i(t) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\forall s,t \in \boldsymbol{T},\; i = \overline{1,4},$$

а ассоциированные фундаментальные матрицы $B^i(t,s)$, $i = \overline{1,4}$, *соответствующие уравнениям* (2.1), *имеют следующую конструкцию*

$$B^i(t,s) = \quad (3.3)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\varphi_1^i(t)\left(\varphi_2^i(s)\right)' - \varphi_2^i(t)\left(\varphi_1^i(s)\right)'}{W^i(s)} & K^i(t,s) \\ \hline \dfrac{\left(\varphi_1^i(t)\right)'\left(\varphi_2^i(s)\right)' - \left(\varphi_2^i(t)\right)'\left(\varphi_1^i(s)\right)'}{W^i(s)} & K_t^{i\prime}(t,s) \end{array}\right),$$

$$\forall s,t \in \boldsymbol{T},\; i = \overline{1,4}.$$

Доказательство. Используя представления (3.1), распишем матрицы $B^i(t,s)$

$$B^i(t,s) = \phi^i(t)\left(\phi^i(s)\right)^{-1} = \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{W^i(s)} \begin{pmatrix} \varphi_1^i(t) & \varphi_2^i(t) \\ \left(\varphi_1^i(t)\right)' & \left(\varphi_2^i(t)\right)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\varphi_2^i(s)\right)' & -\varphi_2^i(s) \\ -\left(\varphi_1^i(s)\right)' & \varphi_1^i(s) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{W^i(s)} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \varphi_1^i(t)\left(\varphi_2^i(s)\right)' - \\ -\varphi_2^i(t)\left(\varphi_1^i(s)\right)' \end{matrix} & \begin{matrix} -\varphi_1^i(t)\varphi_2^i(s) + \\ +\varphi_2^i(t)\varphi_1^i(s) \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \left(\varphi_1^i(t)\right)'\left(\varphi_2^i(s)\right)' - \\ -\left(\varphi_2^i(t)\right)'\left(\varphi_1^i(s)\right)' \end{matrix} & \begin{matrix} -\left(\varphi_1^i(t)\right)'\varphi_2^i(s) + \\ +\left(\varphi_2^i(t)\right)'\varphi_1^i(s) \end{matrix} \end{array}\right).$$

С другой стороны, исходя из определения функций Коши $K^i(t,s)$ и утверждения 2.2 элементы последних столбцов в ассоциированных фундаментальных матрицах $B^i(t,s)$ есть соответствующие функции Коши и их производные по первой переменной, т. е.

$$B^i(t,s) = \begin{pmatrix} \beta^i(t,s) & K^i(t,s) \\ \beta_t^{i\prime}(t,s) & K_t^{i\prime}(t,s) \end{pmatrix}, \; i = \overline{1,4}. \quad (3.5)$$

Приравнивая поэлементно представления (3.4) и (3.5) матриц $B^i(t,s)$, $i = \overline{1,4}$, получаем формулы (3.2) и (3.3).

Заметим, что случай $\left[\Delta L^i\left(\mu_l\right)\right]^2 = 0, \forall \mu_l$ – точек разрыва L, был рассмотрен в монографии [4]. При выполнении этого условия $L^i(t) = L^1(t)$, $i = \overline{1,4}$ и формулы (3.2), (3.3) совпадают соответственно с формулами (14.3) и (13.7) из монографии [4].

***Теорема* 3.3.** *Если* $\Delta a\left(\mu_l\right) \neq 1$ *для любых* μ_l *– точек разрыва функций a и σ, то ассоциированные фундаментальные матрицы* $B^i(t,r)$, $\forall\, t, r \in \boldsymbol{T}$, $i=1,3$ *представляются в виде*

$$B^1\left(t,r\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 - \int_r^t K^1(t,s)d\sigma^c(s) - \\ - \sum\limits_{r<\mu_l\le t} K^1(t,\mu_l-)\dfrac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} \end{matrix} & K^1(t,r) \\ \hline \begin{matrix} -\int_r^t K_t^{1\prime}(t,s)d\sigma^c(s) - \\ - \sum\limits_{r<\mu_l\le t} K_t^{1\prime}(t,\mu_l-)\dfrac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} \end{matrix} & K_t^{1\prime}(t,r) \end{array}\right),$$

$$B^3\left(t,r\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 - \int_r^t K^3(t,s)d\sigma^c(s) - \\ - \sum\limits_{r<\mu_l\le t} K^3(t,\mu_l-)\Delta\sigma(\mu_l) \end{matrix} & K^3(t,r) \\ \hline \begin{matrix} -\int_r^t K_t^{3\prime}(t,s)d\sigma^c(s) - \\ - \sum\limits_{r<\mu_l\le t} K_t^{3\prime}(t,\mu_l-)\Delta\sigma(\mu_l) \end{matrix} & K_t^{3\prime}(t,r) \end{array}\right).$$

Для фундаментальной матрицы $B^4\left(t,r\right)$, $t,r \in \boldsymbol{T}$, *имеет место представление*

$$B^4\left(t,r\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 - \int_r^t K^4(t,s)d\sigma^c(s) - \\ - \sum\limits_{r<\mu_l\le t} K^4(t,\mu_l-)\dfrac{\Delta\sigma(\mu_l)}{\Delta a(\mu_l)} \times \\ \times\left(1 - e^{\Delta a(\mu_l)}\right) \end{matrix} & K^4(t,r) \\ \hline \begin{matrix} -\int_r^t K_t^{4\prime}(t,s)d\sigma^c(s) - \\ \sum\limits_{r<\mu_l\le t} K_t^{4\prime}(t,\mu_l-)\dfrac{\Delta\sigma(\mu_l)}{\Delta a(\mu_l)} \times \\ \times\left(1 - e^{\Delta a(\mu_l)}\right) \end{matrix} & K_t^{4\prime}(t,r) \end{array}\right),$$

если $\Delta a\left(\mu_l\right) \neq 0$ *для любых* μ_l *– точек разрыва функций a и σ,*

$$B^4\left(t,r\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 - \int_r^t K^4(t,s)d\sigma^c(s) - \\ - \sum\limits_{r<\mu_l\le t} K^4(t,\mu_l-)\Delta\sigma(\mu_l) \end{matrix} & K^4(t,r) \\ \hline \begin{matrix} -\int_r^t K_t^{4\prime}(t,s)d\sigma^c(s) - \\ - \sum\limits_{r<\mu_l\le t} K_t^{4\prime}(t,\mu_l-)\Delta\sigma(\mu_l) \end{matrix} & K_t^{4\prime}(t,r) \end{array}\right),$$

$\Delta a\left(\mu_l\right) = 0$ для всех μ_l *– точек разрыва функций a и* σ.

$$B^2(t,r) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 - \int\limits_r^t K^2(t,s)d\sigma^c(s) - & \\ - \sum\limits_{r<\mu_l\le t} K^2(t,\mu_l-)\Delta\sigma(\mu_l)e^{\Delta a(\mu_l)} & K^2(t,r) \\ \hline -\int\limits_r^t K_t^{2\prime}(t,s)d\sigma^c(s) - & \\ - \sum\limits_{r<\mu_l\le t} K_t^{2\prime}(t,\mu_l-)\Delta\sigma(\mu_l)e^{\Delta a(\mu_l)} & K_t^{2\prime}(t,r) \end{array} \right),$$

$$\forall t, r \in \boldsymbol{T}.$$

Доказательство. Для доказательства нам понадобится следующая теорема.

***Теорема* 3.4** [10]. *Пусть $a, \sigma : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации и для i=1,3 $\forall\mu_l$ $\Delta a(\mu_l) \ne 1$, μ_l – точки разрыва функции $a(t)$, тогда ассоциированные фундаментальные матрицы $B^i(t,r)$, $i = \overline{1,4}$ по второй переменной удовлетворяют уравнениям*

$$B^i(t,r) = E + \int\limits_r^t B^i(t,s)d\widehat{L^i}(s), \qquad r,t \in T, i = \overline{1,4}, \tag{3.6}$$

где

$$\widehat{L^i}(t) = L^c(t) + \sum_{r<\mu_l\le t} \left[E + \Delta L^i(\mu_l)\right]^{-1} \Delta L^i(\mu_l),$$

$$L^c(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -\sigma^c(t) & -a^c(t) \end{pmatrix}.$$

Доказательство проведем для случая $i = 1$. Для остальных случаев, $i = \overline{2,4}$, доказательство проводится аналогично.

Найдя по определению обратной матрицы матрицу $\left[E + \Delta L^1(\mu_l)\right]^{-1}$, несложно получить

$$\left[E + \Delta L^1(\mu_l)\right]^{-1} \Delta L^1(\mu_l) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{-\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} & \dfrac{-\Delta a(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} \end{pmatrix},$$

$$\Delta a(\mu_l) \ne 1.$$

Подставляем представление (3.5) матрицы $B^1(t, r)$ и найденную матрицу

$$\left[E + \Delta L^1(\mu_l)\right]^{-1} \Delta L^1(\mu_l)$$

в равенство (3.6)

$$\begin{pmatrix} \beta^1(t,r) & K^1(t,r) \\ \beta_t^{1\prime}(t,r) & K_t^{1\prime}(t,r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int\limits_r^t \begin{pmatrix} \beta^1(t,s) & K^1(t,s) \\ \beta_t^{1\prime}(t,s) & K_t^{1\prime}(t,s) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} 0 & s \\ -\sigma^c(s) & -a^c(s) \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{r<\mu_l\le t} \begin{pmatrix} \beta^1(t,\mu_l-) & K^1(t,\mu_l-) \\ \beta_t^{1\prime}(t,\mu_l-) & K_t^{1\prime}(t,\mu_l-) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{-\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} & \dfrac{-\Delta a(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} \beta^1(t,r) & K^1(t,r) \\ \beta_t^{1\prime}(t,r) & K_t^{1\prime}(t,r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int\limits_r^t \left(\begin{array}{c|c} -K^1(t,s)d\sigma^c(s) & \begin{array}{c} \beta^1(t,s)ds - \\ -K^1(t,s)da^c(s) \end{array} \\ \hline -K_t^{1\prime}(t,s)d\sigma^c(s) & \begin{array}{c} \beta_t^{1\prime}(t,s)ds - \\ -K_t^{1\prime}(t,s)da^c(s) \end{array} \end{array} \right) +$$

$$+ \sum_{r<\mu_l\le t} \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} -K^1(t,\mu_l-)\times \\ \times\dfrac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} \end{array} & \begin{array}{c} -K^1(t,\mu_l-)\times \\ \times\dfrac{\Delta a(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -K_t^{1\prime}(t,\mu_l-)\times \\ \times\dfrac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} \end{array} & \begin{array}{c} -K_t^{1\prime}(t,\mu_l-)\times \\ \times\dfrac{\Delta a(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} \end{array} \end{array} \right).$$

Приравнивая поэлементно, находим $\beta^1(t,r)$ и $\beta_t^{1\prime}(t,r)$

$$\beta^1(t,r) = 1 - \int\limits_r^t K^1(t,s)d\sigma^c(s) - \sum_{r<\mu_l\le t} K^1(t,\mu_l-)\frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)},$$

$$\beta_t^{1\prime}(t,r) = 1 - \int\limits_r^t K_t^{1\prime}(t,s)d\sigma^c(s) - \sum_{r<\mu_l\le t} K_t^{1\prime}(t,\mu_l-)\frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)}.$$

***Замечание* 3.1.** При $\left[\Delta L^i(\mu_l)\right]^2 = 0$, $i = \overline{1,4}$ для любых μ_l – точек разрыва L, $B^1(t,r) = B^i(t,r)$ $\forall i = \overline{1,4}$. При этом фундаментальная матрица $B^1(t,r)$ имеет вид

$$B^1(t,r) = \begin{pmatrix} 1 - \int\limits_r^t K^1(t,s)d\sigma(s) & K^1(t,r) \\ -\int\limits_r^t K_t^{1\prime}(t,s)d\sigma(s) & K_t^{1\prime}(t,r) \end{pmatrix}, \forall t, r \in T$$

причем

$$1 - \int\limits_r^t K^1(t,s)d\sigma(s) = K^{1\{1\}}(t,r) =$$

$$= -K^{1\prime}{}_r(t,r) + K^1(t,r)a'(r),$$

где $K^{1\{1\}}(t,r)$ – квазипроизводная функции Коши по второй переменной в смысле сопряженного уравнения (с. 122, с. 148 из монографии [4]).

4 Представление ассоциированных решений через функции Коши

***Теорема* 4.1** [10]. *Если при i = 1,3 для любых μ_l, таких что $\Delta a(\mu_l) \ne 1$, где μ_l – точки разрыва функции a, то решения интегральных уравнений (1.2) представляются в виде*

$$X^i(t) = B^i(t,0)X^i(0) + \int_0^t B^i(t,\tau)\,dF^c(\tau) + \sum_{0<s\le t} B^i(t,s)\Delta F(s),\ \ t\in \boldsymbol{T},\ i=\overline{1,4}. \tag{4.1}$$

Найдем представление ассоциированных решений линейных неоднородных уравнений (1.2) через функции Коши. Для этого понадобятся теорема 3.3 и теорема 4.1.

Теорема* 4.2.** *Если* $\Delta a(\mu_l)\ne 1, \forall \mu_l$ *– точек разрыва функции a, σ, f, то решения интегральных уравнений* (1.2) *при i* = 1,3 ∀ *t* ∈ ***T *представимы в виде*

$$X_1^1(t) = \left(1-\int_0^t K^1(t,s)d\sigma^c(s) - \sum_{0<\mu_l\le t} K^1(t,\mu_l-)\frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)}\right)c_1 + K^1(t,0)c_2 - \int_0^t K^1(t,s)df^c(s) - \sum_{0<\mu_l\le t} K^1(t,\mu_l)\Delta f(\mu_l),$$

$$X_1^3(t) = \left(1-\int_0^t K^3(t,s)d\sigma(s)\right)c_1 + K^3(t,0)c_2 - \int_0^t K^3(t,s)df^c(s) - \sum_{0<\mu_l\le t} K^3(t,\mu_l)\Delta f(\mu_l).$$

Если $\Delta a(\mu_l)\ne 0\,\forall \mu_l$, *то решение интегрального уравнения* (1.2) *при i* = 4 ∀ *t* ∈ ***T*** *представимо в виде*

$$X_1^4(t) = \left(1-\int_0^t K^4(t,s)d\sigma^c(s) - \sum_{0<\mu_l\le t} K^4(t,\mu_l-)\frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{\Delta a(\mu_l)}\left(1-e^{\Delta a(\mu_l)}\right)\right)c_1 + K^4(t,0)c_2 - \int_0^t K^4(t,s)df^c(s) - \sum_{0<\mu_l\le t} K^4(t,\mu_l)\Delta f(\mu_l),$$

если $\Delta a(\mu_l) = 0\,\forall\mu_l$, *то*

$$X_1^4(t) = \left(1-\int_0^t K^4(t,s)d\sigma(s)\right)c_1 + K^4(t,0)c_2 - \int_0^t K^4(t,s)df^c(s) - \sum_{0<\mu_l\le t} K^4(t,\mu_l)\Delta f(\mu_l).$$

Решение интегрального уравнения (1.2) *при i* = 2 ∀ *t* ∈ ***T*** *имеет вид*

$$X_1^2(t) = \left(1-\int_0^t K^2(t,s)d\sigma^c(s) - \sum_{0<\mu_l\le t} K^2(t,\mu_l-)\Delta\sigma(\mu_l)e^{\Delta a(\mu_l)}\right)c_1 + K^2(t,0)c_2 - \int_0^t K^2(t,s)df^c(s) - \sum_{0<\mu_l\le t} K^2(t,\mu_l)\Delta f(\mu_l).$$

Доказательство. Приведем доказательство для случая *i* = 1. Подставляем представление матрицы $B^1(t,s)$ из теоремы 3.3 в равенство (4.1).

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t)\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1-\int_r^t K^1(t,s)d\sigma^c(s) - \sum_{r<\mu_l\le t} K^1(t,\mu_l-)\frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} & K^1(t,r) \\ \hline -\int_r^t K_t^{1\prime}(t,s)d\sigma^c(s) - \sum_{r<\mu_l\le t} K_t^{1\prime}(t,\mu_l-)\frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} & K_t^{1\prime}(t,r)\end{array}\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix} +$$

$$+\int_0^t \left(\begin{array}{c|c} 1-\int_\tau^t K^1(t,s)d\sigma^c(s) - \sum_{\tau<\mu_l\le t} K^1(t,\mu_l-)\times\frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} & K^1(t,\tau) \\ \hline -\int_\tau^t K_t^{1\prime}(t,s)d\sigma^c(s) - \sum_{\tau<\mu_l\le t} K_t^{1\prime}(t,\mu_l-)\times\frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} & K_t^{1\prime}(t,\tau)\end{array}\right) d\begin{pmatrix} 0 \\ -f^c(\tau)\end{pmatrix} +$$

$$+\sum_{0<s\le t} \left(\begin{array}{c|c} 1-\int_s^t K^1(t,r)d\sigma^c(r) - \sum_{s<\mu_l\le t} K^1(t,\mu_l-)\times\frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} & K^1(t,s) \\ \hline -\int_s^t K_t^{1\prime}(t,r)d\sigma^c(r) - \sum_{s<\mu_l\le t} K_t^{1\prime}(t,\mu_l-)\times\frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)} & K_t^{1\prime}(t,s)\end{array}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta f(s)\end{pmatrix}.$$

Из первого уравнения системы получаем

$$X_1^1(t) = \left(1-\int_0^t K^1(t,s)d\sigma^c(s) - \sum_{0<\mu_l\le t} K^1(t,\mu_l-)\frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{1-\Delta a(\mu_l)}\right)c_1 + K^1(t,0)c_2 - \int_0^t K^1(t,s)df^c(s) - \sum_{0<\mu_l\le t} K^1(t,\mu_l)\Delta f(\mu_l).$$

***Замечание* 4.1.** При $\left[\Delta L^i(\mu_l)\right]^2 = 0, \forall\mu_l$ – точек разрыва функции *L*, представления решений уравнений (1.2), полученные в теореме 4.2, совпадают с представлением решения, полученным в теореме 16.10 на с. 127 в монографии [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ligeza*, *J.* On generalized solutions of some differential nonlinear equations of order *n* / J. Ligeza // Ann. Pol. Math. 1975 – Vol. 31, № 2. – P. 115–120.

2. *Завалищин*, *С.Т.* Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин – М. : Наука. 1991. – 256 с.

3. *Pandit*, *S.G.* Differential systems involving impulses / S.G. Pandit, S.G. Deo – Lect. Notes Math, Berlin : Springer-Verlag. 1982. – 102 p.

4. *Узагальнені квазідиференціальні рівняння* / Р.М. Тацій [і інш.]. – Дрогобич, Коло. 2011. – 301 с.

5. *Антоневич*, *А.Б.* Об общем методе построения алгебр обобщенных функций / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 318, № 2. – С. 267–270.

6. *Лазакович*, *Н.В.* Задача Коши для систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций / Н.В. Лазакович, О.Л. Яблонский, А.К. Хмызов // Доклады НАН РБ. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 5–9.

7. *Bedziuk*, *N.V.* Solutions of nonlinear differential equations / N.V. Bedziuk, A.L. Yablonski // Nonlinear Differential Equations and Applications. – 2010. – Vol. 17, № 2. – P. 249–270.

8. *Автушко*, *Т.С.* Ассоциированные вронскианы линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщёнными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Т.С. Автушко // Весці БДПУ. Серия 3. – 2013. – № 2. – С. 21–25.

9. *Миллер*, *Б.М.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями: монография / Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович. – М. : Наука. – 2005. – 429 с.

10. *Автушко*, *Т.С.* Задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами / Т.С. Автушко, А.Ю. Русецкий // XI Белорусская математическая конференция: тезисы докладов Междунар. науч. конф. – Минск, 4–9 ноября 2012 г. Институт математики НАН Беларуси. – Минск. – 2012. – Ч. 1. – С. 30–31.

11. *Антоневич*, *А.Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: учебник / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – 2-е издание. – Минск : БГУ. – 2006. – 430 с.

12. *Автушко*, *Т.С.* Представление вронскиана линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщёнными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Т.С. Автушко // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2013) : тезисы докладов. – Гродно, 15–17 мая 2013 г. – Ч. 2. – С. 29.

Поступила в редакцию 01.07.13.